



**HAL**  
open science

# Enseigner la dérivation et la primitivation avec Cabri

Jean-Jacques Dahan

► **To cite this version:**

Jean-Jacques Dahan. Enseigner la dérivation et la primitivation avec Cabri. Jun 2003, Reims, France. edutice-00001324

**HAL Id: edutice-00001324**

**<https://edutice.hal.science/edutice-00001324>**

Submitted on 11 Jan 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Enseigner la dérivation et la primitivation avec Cabri

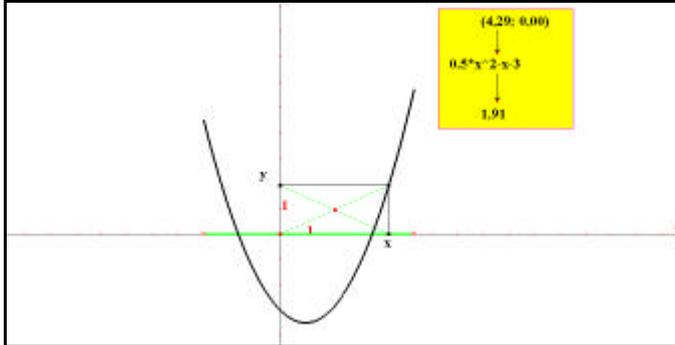
CO18th1

Jean-Jacques DAHAN apt01 Bat A 221 Chemin de Gabardie 31200 Toulouse

## 1. PROPOSITIONS DE TRANSPOSITION DE DIVERS CONCEPTS D'ANALYSE SOUS CABRI

### 1.1. DE LA NOTION DE FONCTION

#### Courbe représentative de fonction comme lieu de points



Après l'édition de l'expression d'une fonction définie par  $f(x) = 0.5x^2 - x - 3$  avec le nouvel outil de Cabri II Plus, « **Expression** », on construit un point générique de la courbe de  $f$  à partir du point d'abscisse  $x$  d'un segment de l'axe des abscisses et du point d'ordonnée  $y = f(x)$  calculé avec le nouvel outil de Cabri II Plus, « **Appliquer une expression** ». La courbe de  $f$  définie sur le segment donné est obtenue comme lieu du point générique quand  $x$  varie sur son segment d'appartenance.

On aurait pu directement, comme avec l'éditeur de fonctions d'une calculatrice, faire afficher directement la courbe de l'expression donnée en cliquant successivement sur l'expression et sur le système d'axes. Dans ce cas là on pourrait circuler sur la « ligne courbe » obtenue soit en choisissant le mode trace sur la calculatrice soit en plaçant un point sur l'objet « lieu » dans Cabri.

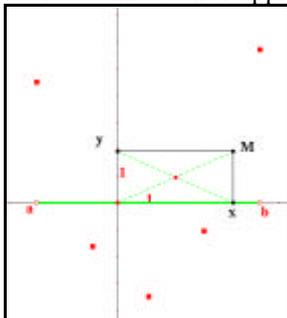
Dans la procédure proposée, le point générique est commandé par le point  $x$  qui est l'objet sur lequel nous avons fait agir l'opérateur fonctionnel. Dès qu'on demande le lieu, **la nature opérationnelle** de la fonction, utilisée au départ pour créer un point de la courbe s'évapore pour faire apparaître une ligne à la place d'un point ; c'est la **nature structurelle** de la notion de fonction qui apparaît. On retombe sur l'objet obtenu sur la calculatrice où la **base causale** de la fonction a aussi disparu ; on peut manipuler un point de la courbe qui commande  $x$  et  $y$  simultanément ; ce que nous manipulons n'est autre que la restriction à une courbe du plan d'une fonction de deux variables réelles à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  qui à chaque point de cette courbe fait correspondre ses coordonnées. Il y a une différence trop importante entre deux représentations de la même notion. Voici une façon de procéder qui va tendre à **rapprocher ces deux représentations et permettre un passage en continuité de l'une à l'autre**.

Notons que le type de construction choisi contient en lui-même par sa symétrie en  $x$  et en  $y$  la perte de la base causale,  $x$  n'a pas un rôle privilégié par rapport à  $y$ . Dans certains livres on pallie cet inconvénient en remplaçant les deux segments par des vecteurs (l'un allant de  $x$  à  $M$  et l'autre allant de  $M$  à  $y$ ) mais avec l'incohérence qu'on passe par le point qu'on veut construire pour passer de  $x$  à son image  $f(x)$ . L'algorithme de construction proposée sur un point montre cette asymétrie qui disparaît dans le passage au lieu.

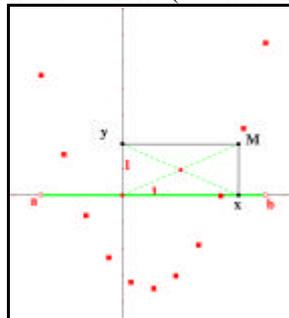
#### Courbe représentative de fonction comme lieu restreint

Pour essayer de faire réapparaître sur le dessin cette asymétrie des rôles de  $x$  et  $y$ , au lieu de demander le lieu des points  $M$  pour toutes les positions intermédiaires de  $x$  que le logiciel peut envisager (en réalité, Cabri envisage 50 positions intermédiaires de  $x$  qui donne 50 points  $M$  qu'il relie aussi par défaut par des segments) il suffit de modifier les options du logiciel pour obtenir ce lieu avec un nombre réduit de points qu'on ne reliera pas.

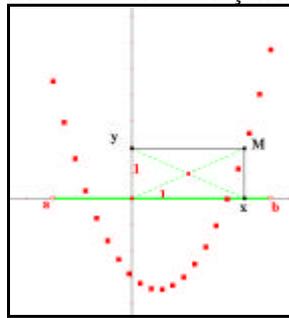
Ci-dessous, on a réalisé quatre cas particuliers montrant comment ces ensembles discrets de points approchent la courbe donnée dans l'approche structurelle (où une fonction est associée de façon isomorphe à une courbe)



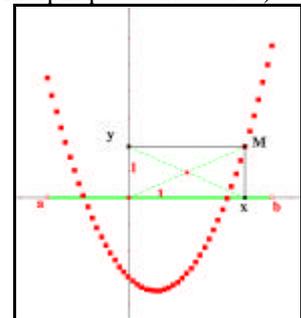
5 points



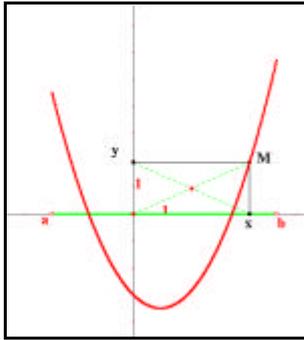
11 points



21 points

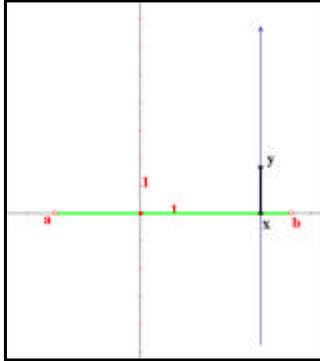


51 points



En augmentant le nombre de points du lieu on arrive à la représentation donnée au départ : on a obtenu des modèles successifs de la représentation de cette fonction à partir de la conception opérationnelle pour arriver à la représentation en adéquation avec la structure objet de la fonction, caractéristique de la conception structurelle.

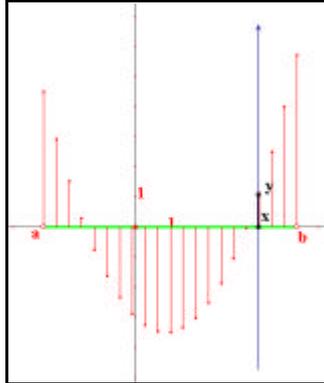
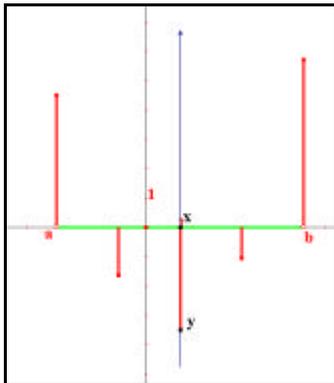
### Courbe représentative de fonction comme lieu d'extrémités de segments (représentation de Clairaut)



Ici on a reporté  $y$  sur un axe parallèle à l'axe des ordonnées, chaque segment d'origine  $x$  indique à son extrémité la valeur de  $y$ .

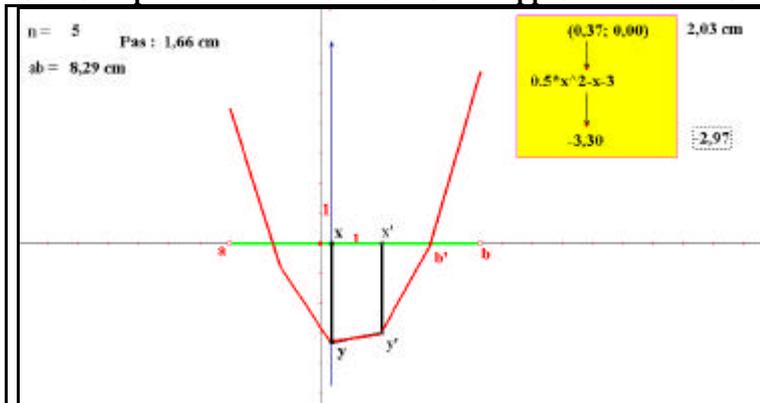
Pour avoir une visualisation de la manière dont  $y$  varie en fonction de  $x$ , on demande toujours un lieu mais ici le lieu des segments  $[xy]$  quand  $x$  varie. Ainsi une lecture de gauche à droite ou une lecture dynamique en tirant sur  $x$  permet de concentrer son attention sur le couple  $(x; y)$  et non sur la paire  $\{x; y\}$  permettant de conserver le côté opératoire de la fonction dans la construction de la représentation graphique.

En augmentant dans les préférences le nombre désiré d'éléments d'un lieu, on obtient les graphiques suivants.



La visualisation dynamique dans cette représentation qui permet d'animer  $x$  sur une même horizontale, permet d'affirmer son côté « variable indépendante » commandant la longueur du segment ayant  $x$  pour origine et confirmant parallèlement la dépendance de  $y$  à  $x$ .

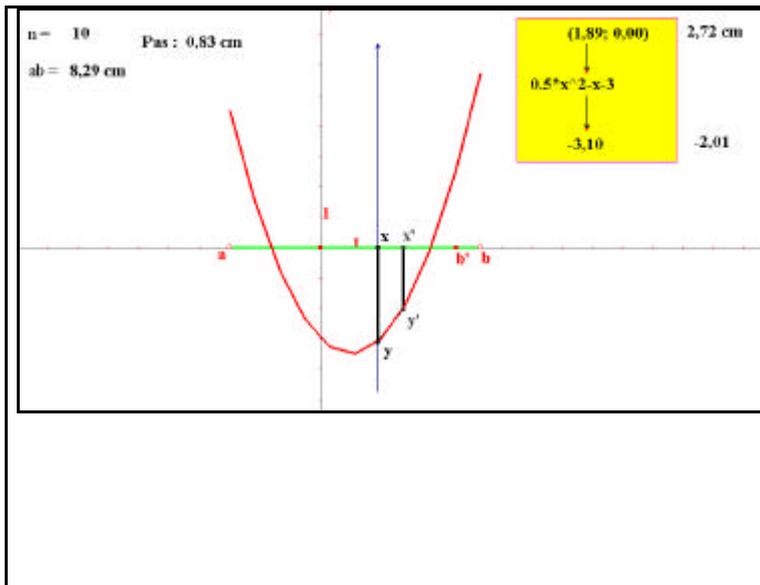
### Courbe représentative de fonction comme approximation uniforme par un lieu de cordes



Ici on a divisé le segment  $[ab]$  en  $n = 5$  parties égales ; on a redéfini le point  $x$  sur le segment  $[ab']$  où  $bb' = ab/n$ , on a calculé  $y' = f(x')$  où  $x' = x + ab/n$ . On a tracé le segment  $[yy']$  joignant deux points de la courbe d'abscisses  $x$  et  $x'$ .

On a enfin demandé le lieu de ce segment quand  $x$  varie après avoir réglé dans les préférences de « lieu » le nombre d'éléments d'un lieu à 5.

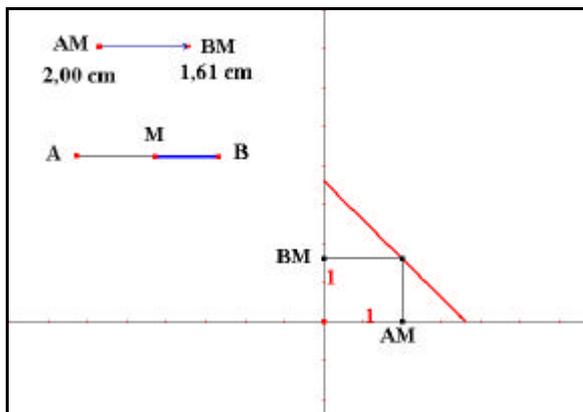
Où l'on retrouve les problèmes de piquets d'une clôture et les espaces inter-piquets.



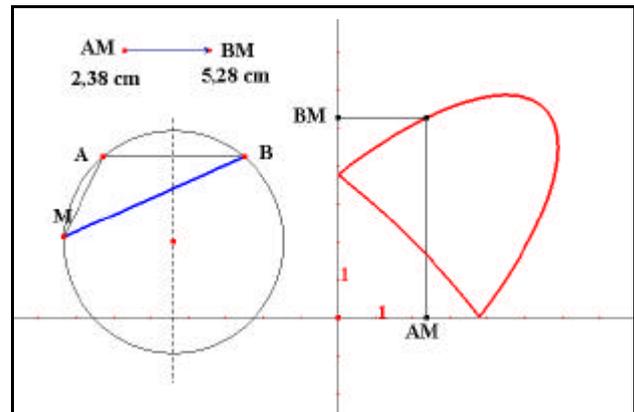
On a répété la procédure précédente en modifiant n qui prend la valeur 10. On peut noter que le graphique obtenu se rapproche très vite de celui qui l'a déjà été au début mais avec une dissociation de l'opérateur et du structurel **dans des actes dissociés**. La mise en continuité est réalisée de manière arbitraire et délibérée par des segments : c'est cet acte qui réalise le lien entre base opérationnelle et base structurelle. Cette initiative mérite d'être questionnée d'un point de vue épistémologique, car elle permet de donner en attendant mieux une représentation de la nature structurelle de la fonction associée implicitement à une ligne en raison des variations continues de la variable x.

Ce type de représentation permet de faire prendre conscience de la discrétisation forcée de toute représentation concrète de la notion de courbe. Mes élèves ont pris conscience que toute représentation de courbe était formée d'un nombre limité de points séparés par d'immenses trous invisibles à cause de la grosseur des points dessinés. Chaque clic de souris décalant x vers la droite d'un pixel, montre le saut numérique réalisé au dessus d'un intervalle non vide ; il montre aussi la nature opérationnelle de la conception travaillée alors que la visualisation peut donner l'impression que nous sommes dans le domaine structurel.

**Remarque :** je ne suis pas d'accord avec ce que l'on peut lire quelquefois au sujet des fonctions géométriques qui rétablirait cette asymétrie ; pour preuve montrer l'exemple suivant



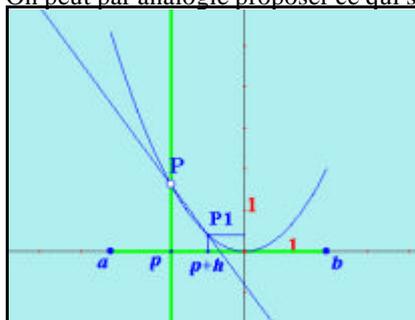
La fonction qui à AM « fait correspondre » BM donne comme prévu un segment.



Mais si on redéfinit M comme élément d'un cercle centré sur la médiatrice de [AB], le lien fonctionnel disparaît

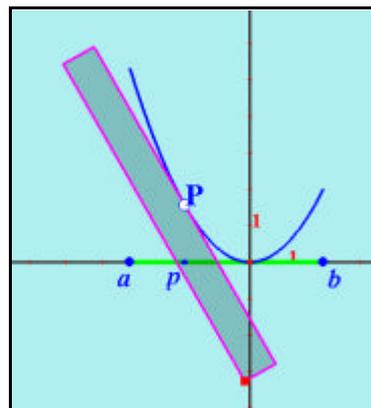
## 1.2. DES NOTIONS DE TANGENTES ET DÉRIVÉES

**Une piste pour donner du sens aux représentations naïves de la notion de tangente :** Les physiciens qui sont souvent confrontés à l'introduction de notions pour lesquelles leurs élèves ont des représentations concrètes dues à notre environnement social s'appuient sur celles-ci comme point d'ancrage de leur monstration expérimentale. On peut par analogie proposer ce qui suit :



Comment le Professeur qui a en tête la notion de tangente à une courbe comme limite de sécantes peut-il amener ses élèves à adhérer à cette représentation en partant de leur représentation naïve qui est souvent, « la tangente c'est quelque chose qui colle à la courbe » ? (cette proposition est celle que j'ai obtenue de manière majoritaire à chaque fois que j'ai posée la question à des élèves de tous niveaux et à tout moment de leur cursus en Lycée)

L'approche du problème au tableau avec comme outil d'expérimentation, la règle permet grâce à une phase dialoguée, d'obtenir pour chaque point de la courbe une position de la règle qui va permettre de visualiser le concept naïf d'une « droite qui colle à la courbe ».



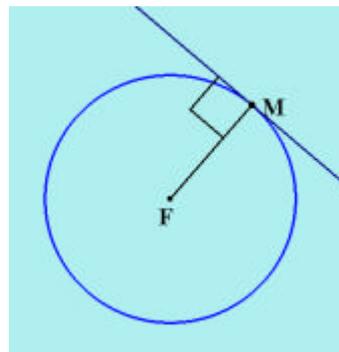
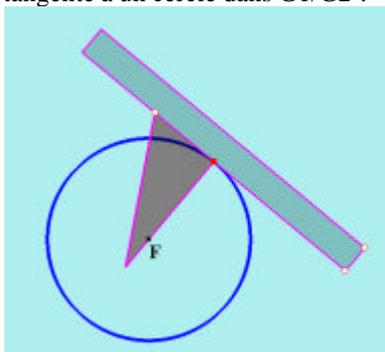
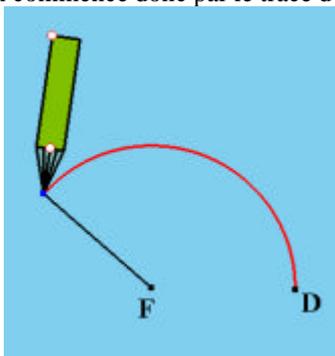
L'exemple du cercle pour lequel on connaît une procédure instrumentale précise de tracé de tangente ne servant que d'un point (en réalité, on se sert d'un autre point, le centre) permet de s'appuyer sur les connaissances de l'élève. Voilà pourquoi, il m'a paru pertinent d'utiliser le cercle comme point d'appui pour la monstration d'un modèle qui pourra être généralisé aux courbes de fonctions.

### Mise en place de la monstration d'instruments de validation d'un modèle

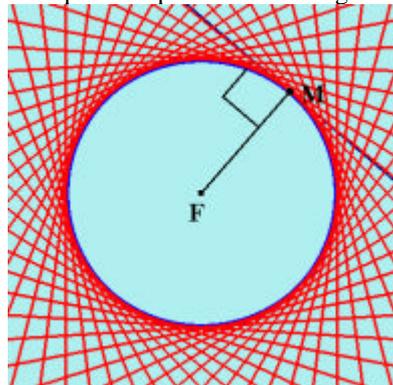
Le but des expériences présentées sera de mettre en évidence des propriétés vérifiées **nécessairement** par les tangentes « mathématiques » (les tangentes de la Géométrie G2 de Parzisz). Cela fait, il faut amener l'apprenti à accepter une telle propriété comme un bon instrument de validation d'un futur modèle de tangente.

Il suffira ensuite de définir d'une manière viable au moins dans le logiciel cette notion de « droite qui colle à la courbe » et valider ensuite avec l'instrument de validation mis en place.

On commence donc par le tracé d'une tangente à un cercle dans G1/G2 :

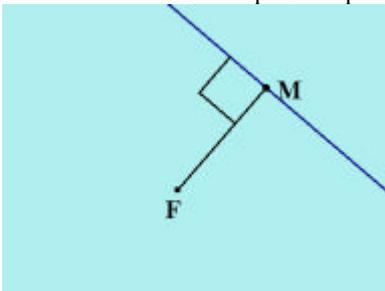


Lorsqu'on dispose de cette tangente, on en demande son lieu quand le point de contact varie :

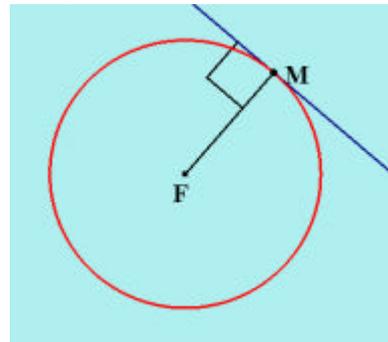


On a représenté le lieu des tangentes avec option de tracé de lieux sans enveloppe. On a une **confirmation globale** et visuelle du fait que les tangentes « collent » à la courbe.

**Ceci est notre instrument de validation N°1**



Ici on a caché le cercle et après avoir réglée l'option de tracé de lieux sur l'option « enveloppe », on obtient la figure ci à droite. On a mis en évidence un outil de Cabri qui permet à partir d'une famille de droites d'obtenir la courbe à laquelle collent ces droites



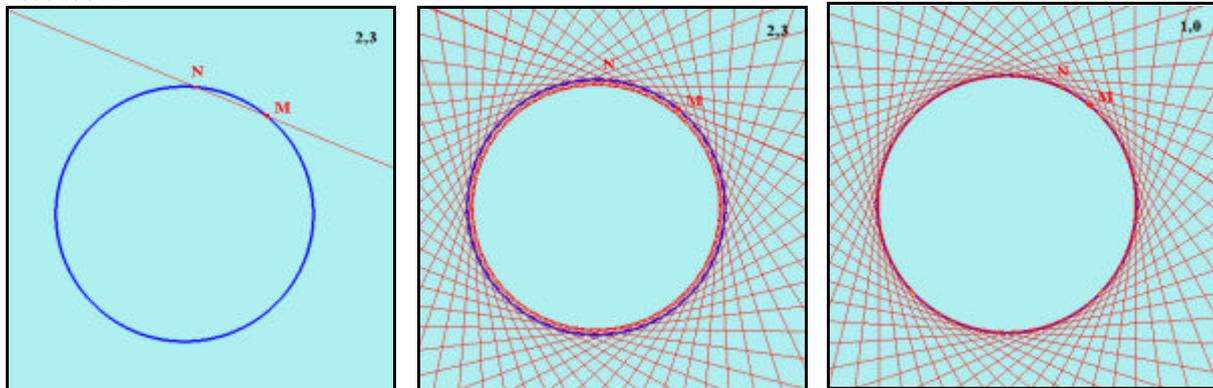
La courbe obtenue en rouge ici est notre cercle. Ceci confirme la validation de gauche.

**Ceci est notre instrument de validation N°2**

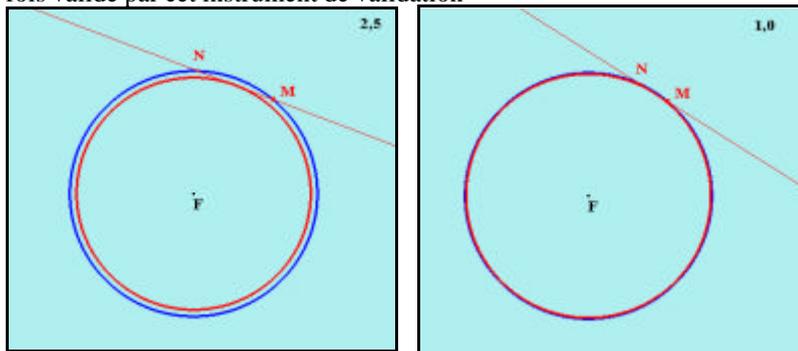
On crée ainsi implicitement en classe, explicitement dans cet article deux instruments de validation d'un modèle de tangente. On peut l'expliciter en classe mais dans les expérimentations faites j'ai laissé les élèves utiliser cet outil sans l'avoir formalisé.

### Création sur le cercle d'un modèle conforme, encore par monstration

Il s'agit de tester sur les sécantes glissantes sur le cercle nos instruments de validation et vérifier qu'ils invalident de telles droites comme candidates tangentes. Il s'agira ensuite en modifiant le paramètre distance des deux points de la sécante de voir comment l'invalidation changeant de forme, va nous conduire au modèle auquel on veut aboutir



Le modèle proposé sur la figure de gauche est invalidé par la figure centrale mais la proximité de l'enveloppe apparaissant en rouge nous incite à diminuer la distance MN pour voir dans la figure de droite le modèle cette fois validé par cet instrument de validation



Le second instrument de validation invalide encore ce modèle sur la figure de gauche et la même manipulation que précédemment nous montre que le modèle peut encore être accepté pour une valeur de MN égale à 1.

### Monstration du modèle avec ses validations

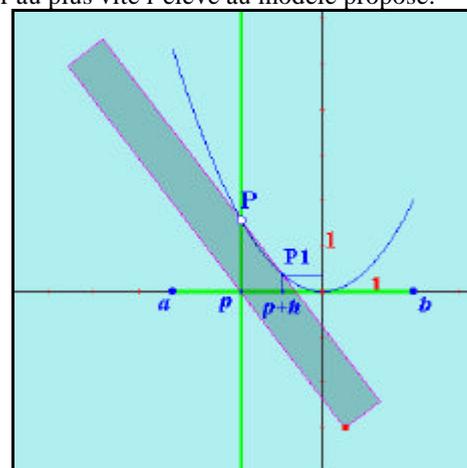
Si, à ce stade on dispose de la courbe d'une fonction et si on demande à l'élève de représenter la règle qui sera utilisée sur une page Cabri où il dispose de la courbe en question avec un point mobile sur celle-ci avec comme consigne que le déplacement du point sur la courbe entraîne la réactualisation du tracé de la droite qui colle à la courbe, le choix du positionnement d'un second point de cette ligne entraîné par le premier apparaît naturellement. Le rôle du Professeur dans le choix **d'une monstration expérimentale (Joshua)** va consister à proposer ou faire proposer le modèle des sécantes, l'adapter en remplaçant la distance MN par le classique h et le valider avec les outils implicitement mis en place pour faire adhérer au plus vite l'élève au modèle proposé.

Voici donc ci à droite le matériel qui va être utilisé pour la monstration. La règle est pilotée par le point P qu'on peut tirer sur la courbe de la fonction  $f(x) = 0.5x^2$ . La règle est dirigée de P à P1 où P1 est le point de la courbe d'abscisse décalée de h (donné et modifiable) par rapport à l'abscisse de P.

Les premières manipulations consistent à évaluer la pertinence visuelle du collage à la courbe pour de telles règles-droites.

D'autres manipulations faites par le Professeur, comme celle faite ci-dessous permettent de montrer que h est comme MN un paramètre réglable dont les modifications sont instantanément visualisés avec superposition des registres numériques et synthétiques.

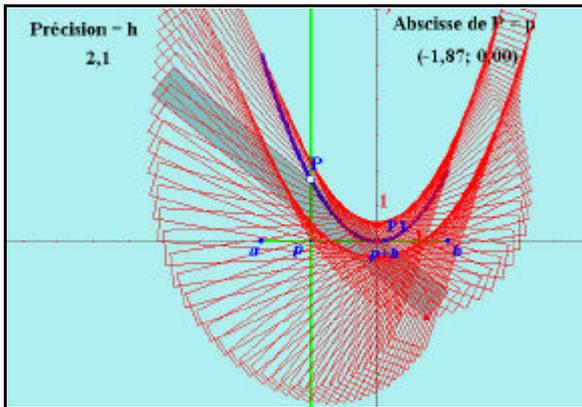
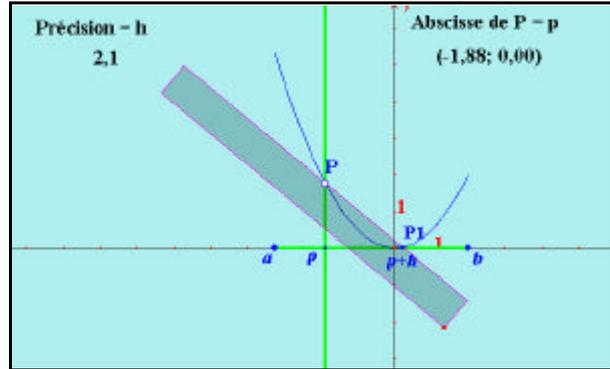
**On est aussi et surtout dans une phase de monstration participative.**



Fichiers qui suivent

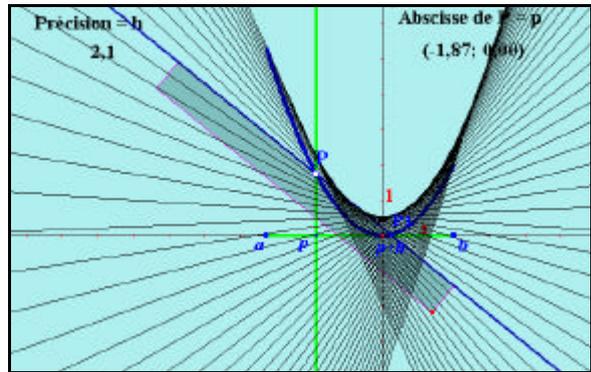
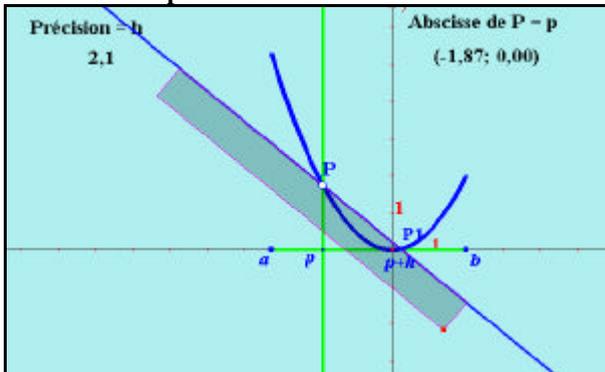
Dans ce fichier, on peut prévoir par analogie avec ce qu'on a observé pour le cercle que cette règle ne va pas coller à la courbe. On peut le valider dynamiquement et visuellement en déplaçant la règle. C'est le moment de tester nos outils de validation.

C'est ce que l'on fait, dans le fichier suivant en animant la règle après avoir activé sa trace.

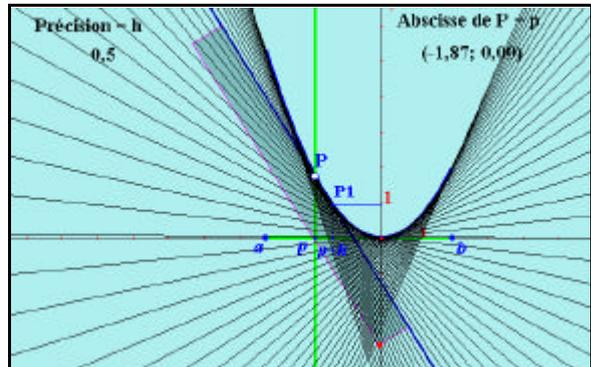
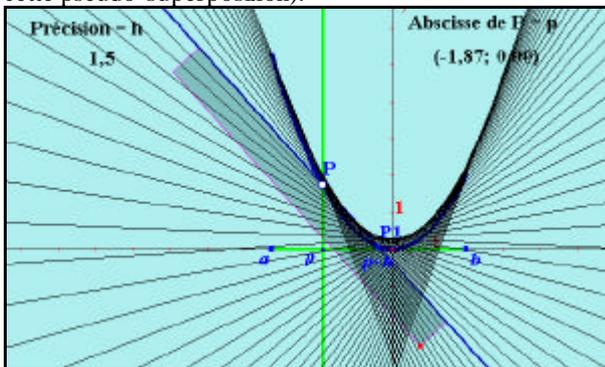


Deux courbes apparaissent naturellement qui marquent les courbes auxquelles collent notre règle qui ne sont pas visiblement les bonnes, la seconde étant une courbe parasite dans notre processus de validation ou d'invalidation. On est donc amené à faire réapparaître la droite cachée PP1 sur laquelle s'appuyait notre règle. C'est sur elle que l'on va faire agir nos outils de validation. On passe progressivement d'un travail dans G0/G1 à un travail dans G1/G2 (**Parzysz**)

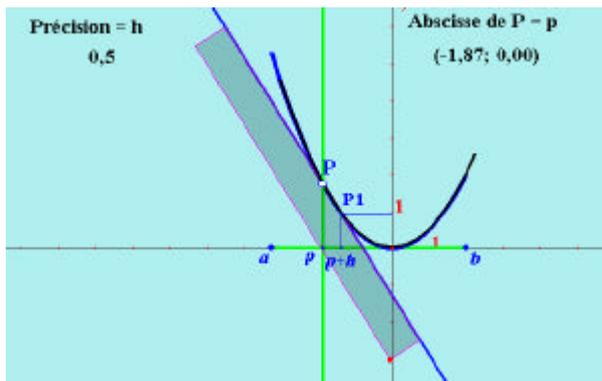
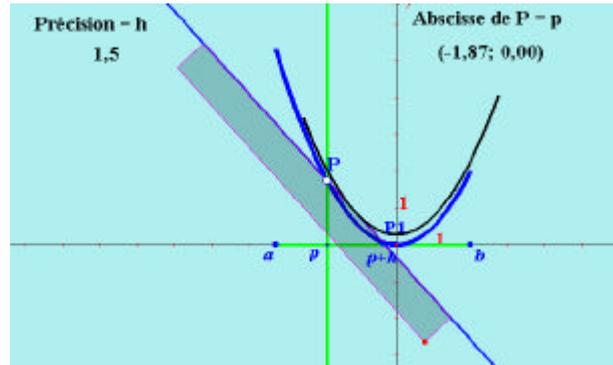
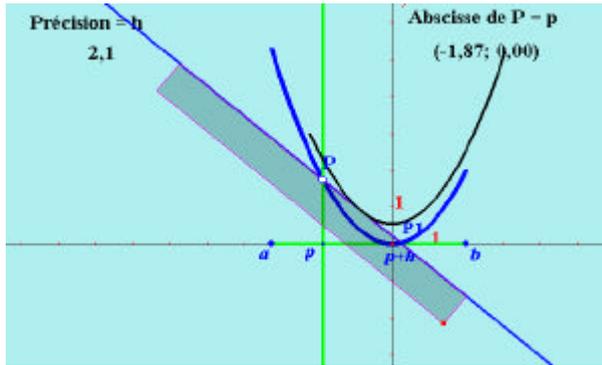
#### Utilisation du premier outil de validation



On se rend compte naturellement que ces sécantes ne collent pas à notre courbe. Quand par la suite on diminue la valeur de h, on s'aperçoit que nos sécantes collent d'autant mieux à la courbe que h diminue. Dans le cas qui nous occupe, il suffit d'atteindre la valeur 0.5 pour que nos sécantes puissent être considérées comme des droites collant à notre courbe au sens naïf donné qui est une conception dans G0/G1 (il y a du visuel et du concret dans cette pseudo-superposition).



## Utilisation du second outil de validation



Cette seconde validation utilisant l'outil « lieu » de Cabri (avec l'option « enveloppe » activée), donne lieu au même type de remarque.

Une différence notable pour un observateur attentif, la courbe enveloppe ne se superpose pas exactement à la courbe de départ même si on l'a vue se lover progressivement dans la courbe de départ.

Si on continue à diminuer la valeur de  $h$ , ce défaut disparaît à partir de 0.01 et la validation devient satisfaisante.

A ce stade de l'expérimentation, on pourrait adopter comme modèle de tangente à une courbe en un point la sécante telle que définie plus haut avec  $h = 0.01$  et **valider ce modèle** en changeant de fonction ce qui est aisé à faire dans Cabri II Plus **en changeant tout simplement l'expression autant de fois que l'on veut**. Et notre expérimentation monstrative participative va devenir une expérience d'affinement d'un modèle grossier qui nous a servi de point de départ.

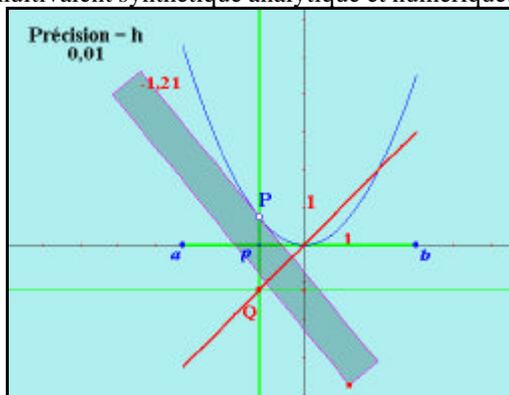
Notons que le modèle imaginé au départ l'a été grâce aux connaissances élémentaires mises en jeu dans le cadre de la représentation naïve des élèves. Il a pu être étudié grâce aux outils spécifiques du logiciel revisité par un expert. Le rôle spécifique des experts dans une telle transposition à support expérimental mérite d'être questionné.

### Définir à ce stade la notion de dérivée comme coefficient directeur de la tangente :

Notons qu'à partir d'une fonction donnée sous sa forme opérationnelle, c'est à dire avec un démarrage dans le cadre algébrique, on a modélisé sa courbe représentative dans l'environnement Cabri pour plonger dans le registre géométrique. Le travail expérimental dans ce registre permet lorsqu'on s'en dégage pour passer au registre analytique de mettre en évidence un concept du cadre algébrique. Ce travail permet en se servant de Cabri de faire une approche d'une notion d'analyse par la construction d'un modèle qui va sans cesse être remis en question pour être amélioré au fil de ses utilisations et de manière collatérale toucher au concept de limite.

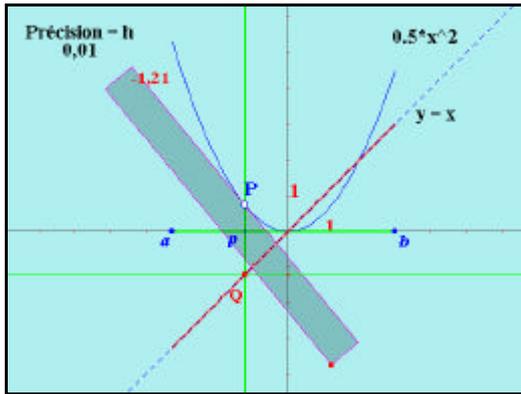
### Dérivation formelle des fonctions du second degré avec ce modèle

La fonction dérivée est donc définie de manière opérationnelle grâce à une définition dégagée dans le registre multivalent synthétique analytique et numérique.



Q est le point ayant même abscisse que P et pour ordonnée le coefficient directeur de notre tangente.

En rouge apparaît le lieu des points Q qui semble être un segment.



Cette conjecture est validée en traçant une droite passant par deux points quelconques de ce lieu qu'on voit ici en pointillés. Cabri donne pour équation  $y = x$ .

On voit apparaître sur ce fichier l'expression de la fonction de départ donnée dans le registre analytique accouplée à la fonction dérivée, elle aussi obtenue dans le registre analytique. Cette présence simultanée permettra d'expérimenter avec diverses autres fonctions (en particulier les fonctions du second et du troisième degré ou les fonctions trigonométriques) soit pour découvrir des formules de dérivations soit pour les valider suivant le moment où cette expérience est menée dans la progression en classe.

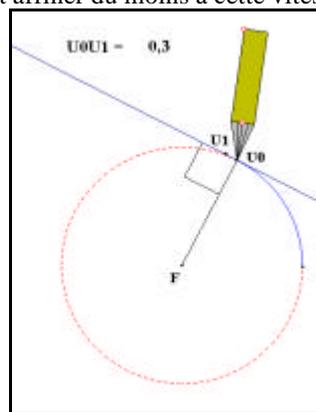
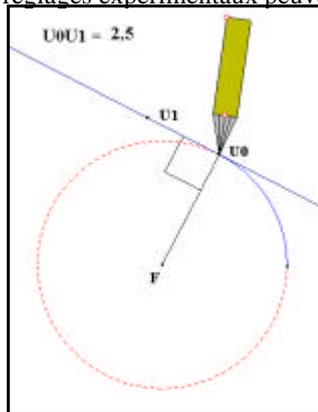
### 1.3. DE LA NOTION DE PRIMITIVATION

#### 1.3.1. Présentation du problème :

Une fonction étant donnée de manière algébrique, c'est à dire par son expression formelle dans Cabri, le problème que l'on propose de traiter est celui de la détermination expérimentale de fonctions admettant la fonction donnée comme dérivée. En réalité, la démarche proposée est celle qui va mettre en évidence un modèle  $P_m$  qui va fonctionner d'autant mieux que  $m$  se rapprochera de 0 ; ce modèle sera mis en évidence avec le cercle qui a été dans le paragraphe précédent la courbe de référence pour créer nos modèles de tangentes à une courbe.

#### 1.3.2. Tracé point par point d'un cercle à partir de l'un de ces points :

La **monstration** qui va être pratiquée ici va avoir pour but de montrer qu'il est possible à partir d'un point d'un cercle de déterminer une séquence de points se déduisant les uns des autres, qui permettent d'approcher ce cercle. Cette suite récurrente de points sera déterminée par son premier point  $U_0$  et une relation de récurrence entre  $U_n$  et  $U_{n+1}$  qui dit comment construire  $U_{n+1}$  connaissant  $U_n$ . Cette construction in fine ne doit dépendre que de la connaissance d'une propriété caractérisant la tangente en  $U_n$ , laquelle devra être indépendante du centre du cercle et dépendre du coefficient directeur de cette tangente. Le paramètre dont va dépendre la précision du modèle et permettant de trouver le meilleur tracé est de par son existence et la possibilité de le modifier en direct dans le champ expérimental, une différence essentielle avec l'équivalent expérimental en Physique où on ne peut imaginer au cours d'une expérience monstrative mettre en évidence un modèle que les réglages expérimentaux peuvent affiner du moins à cette vitesse.



La figure de gauche montre que si on construit à partir du point  $U_0$  donné sur notre cercle un point  $U_1$  sur la tangente en  $U_0$  et à la distance 2.5, le point  $U_1$  n'appartient pas du tout au cercle. Si on observe la seconde figure où on a diminué la distance  $U_0U_1$  jusqu'à 0.3, on constate que le point  $U_1$  a l'air d'être situé sur notre cercle visuellement et sur la page Cabri ; c'est que nous propose cet environnement dont nous savons néanmoins que c'est théoriquement faux. C'est un saut dans le registre synthétique utilisant la définition du cercle et la distance d'un point à une droite qui permet de l'imaginer.

On peut se demander si on applique à  $U_1$  la construction qui a permis de passer de  $U_0$  à  $U_1$ , si cette construction va nous donner un point  $U_2$  qui va encore être sur notre cercle de centre et de rayon donné. Sous Cabri, il suffit d'enregistrer cette construction sous la forme d'une macro qu'on va appliquer à  $U_1$  puis à  $U_2$  pour voir si notre construction permet de manière récurrente de retrouver le cercle que nous cherchons à tracer.

Notons que si la macro construction possède le centre du cercle comme objet initial, elle peut ne pas dépendre effectivement de la connaissance de cette donnée car elle utilise une rotation de ce centre  $F$  autour de  $U_0$  d'angle  $-90^\circ$  (transformant  $F$  en  $U_0$ ) et d'un report de la mesure 2.5 sur la demi-droite  $[U_0 ; F_0)$ . Cette construction à partir de  $U_1$  peut ne dépendre en réalité que de la connaissance de la pente de la tangente en  $U_0$ . C'est justement à cause de cela que cette construction va nous intéresser.



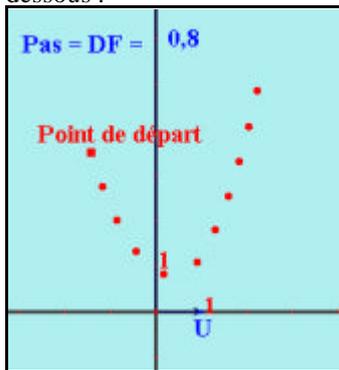
On enregistre donc la construction de F à partir de D sous la forme d'une macro ayant les caractéristiques ci à droite.  
 Notons que le nombre 1 utilisé dans la construction n'a pas été déclaré comme un objet initial car il é été calculé à partir de xD par la formule suivante :

$$\frac{(\text{abs}(xD)+1)}{(\text{abs}(xD)+1)} = 1,00$$

**Macro 1 :**  
**Point suivant 1**  
**Objets initiaux:**  
 point de départ D  
 axes  
 expression  
 pas  
**Objet final :**  
 point d'arrivée F

**Utilisation pratique de ce fichier et de la macro associée pour créer une macro complexe et performante**

Si on applique 10 fois d'affilée cette macro, on obtient la chaîne ci dessous :

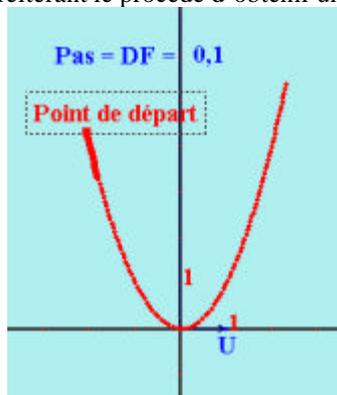
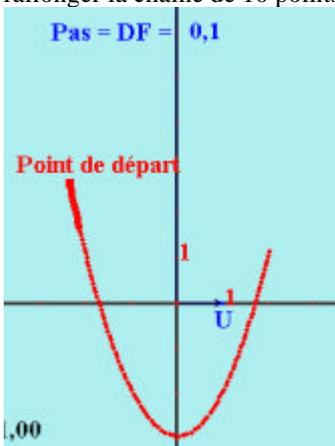


On enregistre sous forme d'une macro la construction de cette chaîne à partir du point de départ. Les caractéristiques de cette macro sont les suivantes :

**Macro 2 :**  
**Points suivants 10**  
**Objets initiaux :**  
 point de départ D  
 axes  
 expression  
 pas  
**Objet final:**  
 10 points suivant F

**Utilisation de la macro complexe pour envisager une réponse au problème posé**

L'application de cette macro au dernier point d'une chaîne de 10 points préalablement obtenue permet de rallonger la chaîne de 10 points et en réitérant le procédé d'obtenir une chaîne aussi longue que l'on veut

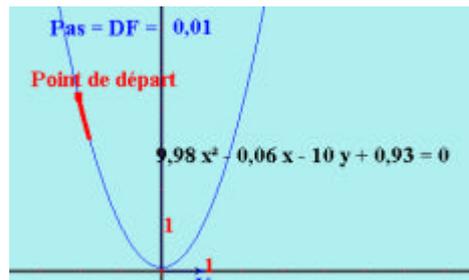
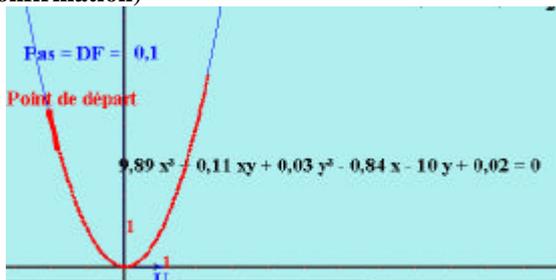


On a tiré sur le point de départ et la chaîne a suivi.

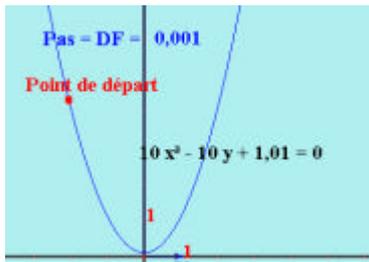
Le Professeur qui connaît la réponse, comme le Professeur de Physique qui sait à quel modèle il veut faire adhérer en expérimentant peut à ce stade tenter une validation logicielle en faisant passer une conique par cinq points quelconques de cette chaîne et demander l'équation de cette conique pour tester un saut de registre, du registre synthétique au registre formel.

Le succès d'un tel test lui permettrait de transposer ce saut de registre en classe pour enrichir l'activité de découverte d'un nouvel outil.

**Une tentative de validation de l'expérimentateur préparateur (ou à la recherche d'expérience de confirmation)**



Les écrans précédents montrent ce qu'on a pu obtenir en diminuant progressivement le pas qui est le paramètre de notre modèle en cours d'élaboration.



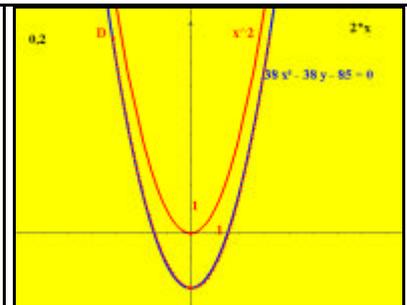
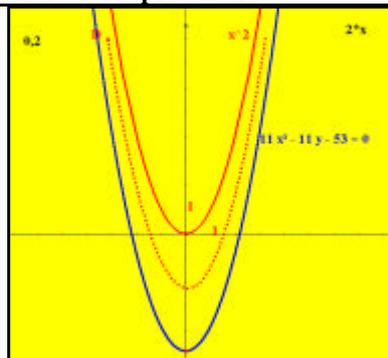
On peut constater qu'à partir du pas 0.01, le logiciel reconnaît une parabole (fonction du second degré en x) qu'il nous est difficile de valider. Pour un pas de 0.001, Le logiciel reconnaît encore une parabole dont l'équation  $y = x^2 + 0.101$  nous semble le plus conforme à notre attente théorique.

Il est intéressant de noter que les compétences du concepteur de l'expérience qui précède l'ont conduit à tenter cette validation analytique dans l'environnement Cabri mais que l'utilisation de l'outil qui donne les équations de coniques ne devra être manipulé qu'après une phase préparatoire servant à juger des conditions opportunes et optimales de son utilisation.

Remarque : si on continue à diminuer la valeur du pas, des surprises désagréables attendent le Professeur ; en effet, les 100 points de notre chaîne sont quasiment agglutinés au point de départ et la conique devient quasiment aléatoire. Ceci confirme que toute expérimentation est fortement dépendante du matériel utilisé et que ses résultats ne peuvent être interprétables dans le cadre d'un modèle que dans des limites que l'expérimentateur doit connaître. L'analogie avec les sciences expérimentales ne peut que nous renforcer dans l'idée d'une préparation spécifique de séances monstratives expérimentales

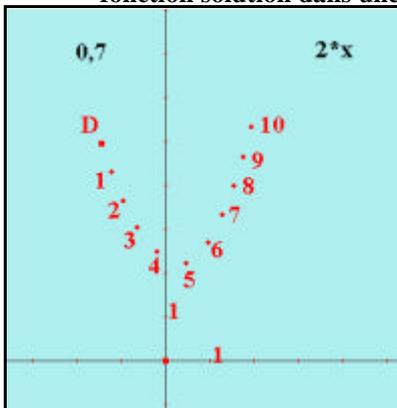
### Une validation pour l'expérience monstrative à présenter

La chaîne qu'on obtient, fait réagir les élèves qui proposent systématiquement «la parabole». Le Professeur pourra donc proposer de comparer la chaîne obtenue à la courbe connue d'équation  $y = x^2$  ou à n'importe laquelle de ses translatées et jouer de manière plus efficace sur le registre analytique formel qu'il pourra faire parler plus simplement comme ci à droite

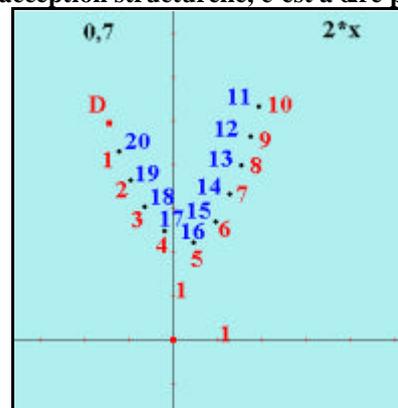


En rouge notre parabole d'équation  $y = x^2$  et en bleue sa translatée suivant une translation verticale variable qu'on peut faire coïncider à notre chaîne, où qu'on ait placé le point D.

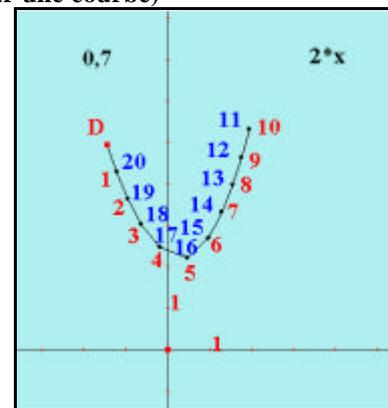
### 1.3.4. Amélioration du modèle pour un retour sur le registre synthétique (celui-ci proposant une fonction solution dans une acception structurelle, c'est à dire par une courbe)



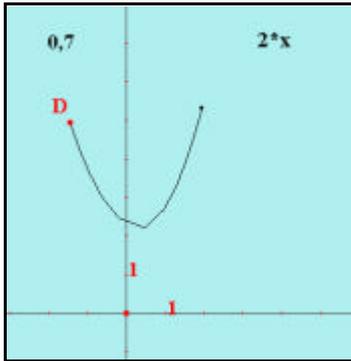
On a appliqué à D la seconde macro qui nous donne la chaîne des 10 points numérotés de 1 à 10.



On applique une autre fois cette macro au point D pour obtenir une chaîne superposée à la précédente où on nommera les points dans le même ordre 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12 et 11 (ce dernier étant superposé au point 10 de la chaîne précédente).



On trace le polygone joignant dans l'ordre les points D, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 et D



Là on a effacé les noms de tous les points sauf D et on a caché tous les points sauf D et le point 10 pour obtenir une ligne polygonale qui sera notre modèle de solution dans le domaine structurel.

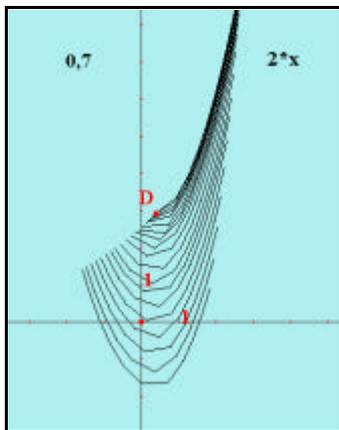
Arrivé à ce stade, on crée une macro construction qui donne vie à ce modèle paramétré par le nombre représentant le pas et par l'expression de la fonction dont on cherche les primitives (courbes ou expressions formelles). Cette macro a

**Pour objet initiaux :** le point de départ, les axes, le pas et l'expression

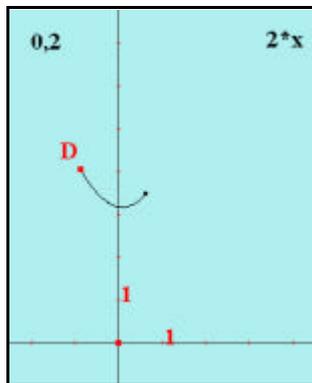
**Pour objet finaux :** la ligne polygonale et son point final  
 Cette macro permettra quand on la répètera un grand nombre de fois d'obtenir des lignes polygonales aussi longues que l'on veut pour modéliser la courbe d'une primitive donnée par des conditions initiales c'est à dire par le point de départ.

Le Professeur devra veiller dans ses préparations expérimentales au choix des dispositifs permettant de faire adhérer son auditoire à un modèle qui soit compatible avec le champ de validation et d'application de celui-ci (je pense au choix de la fonction à intégrer et au pas de départ)

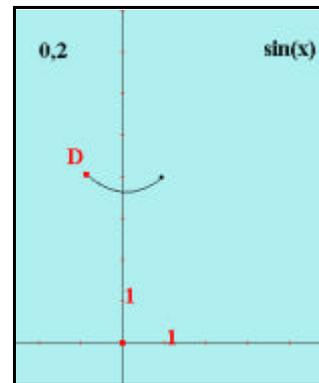
Cette phase correspond en partie à la mise au point du protocole expérimental dans le champ des sciences expérimentales.



Où on vérifie que notre modèle fonctionne à partir d'un grand nombre de points



Quand on diminue le paramètre « pas », le modèle construit permet de visualiser une courbe « réponse plausible locale » à notre problème. La réponse obtenue dans un registre synthétique peut nous faire oublier le registre formel analytique dans lequel le problème a été posé.

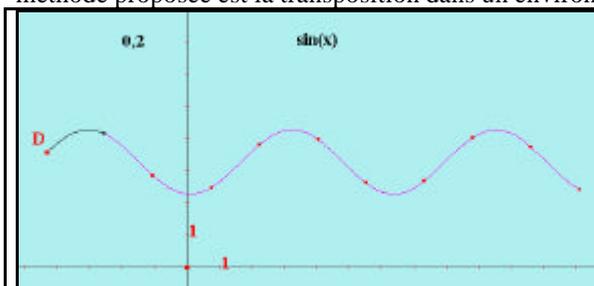


Le fait de pouvoir changer à l'envie l'expression de la fonction initialement donnée, permet de faire perdurer le lien entre les registres de départ et celui dans lequel la réponse doit être interprétée.

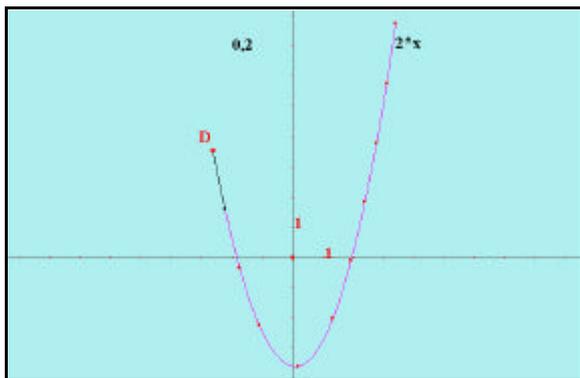
Cela permet de suggérer une piste d'ingénierie didactique, du moins dans ce champ d'intervention pour essayer de pallier les difficultés mise en évidence par **Schneider et Krysinska** dans les problèmes de géométrie posés dans le registre analytique mais nécessitant un passage obligé par le registre synthétique : ceux-ci ont noté la quasi-impossibilité pour leur étudiants de sortir du registre analytique de départ, du moins pour rechercher une piste dans le registre synthétique lorsque ce passage est pourtant incontournable.

### 1.3.5. Mise en place finale d'un outil d'exploration dans le domaine de la primitivation

Si on enchaîne une dizaine de fois cette macro traçant cette ligne polygonale modélisant une courbe d'une primitive d'une fonction donnée, on obtient la première courbe qui suit qui peut et doit constituer un objet d'étude pour revisiter les transpositions classiques de primitives des fonctions trigonométriques (voir par exemple la présentation faite au congrès T3 de Nashville2003), pour l'introduction de la fonction logarithme comme primitive ou la fonction exponentielle népérienne comme solution d'une équation différentielle. La méthode proposée est la transposition dans un environnement informatique de la méthode d'Euler.

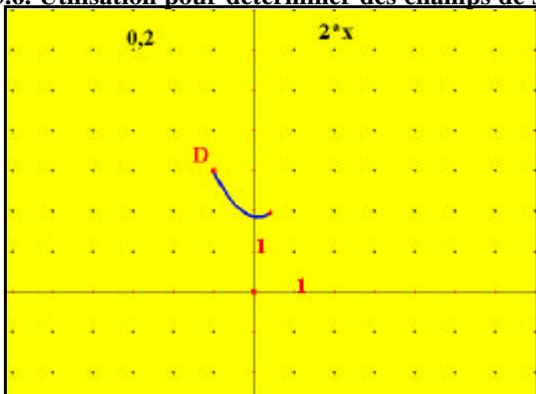


Une utilisation possible de ce fichier peut consister à comparer par superposition la primitive obtenue aux fonctions sinus et cosinus dont les courbes auront été préalablement tracées

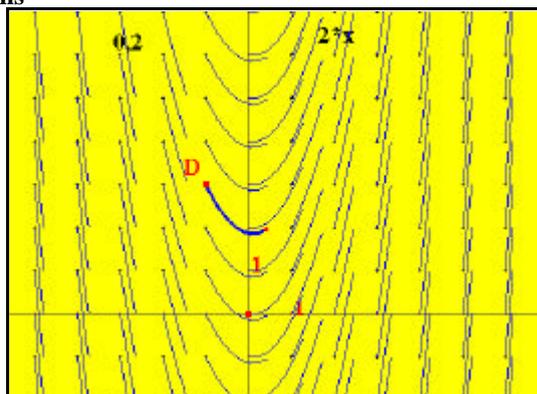


Pour obtenir ce fichier on a simplement modifié l'expression et obtenu instantanément la réactualisation de la construction.

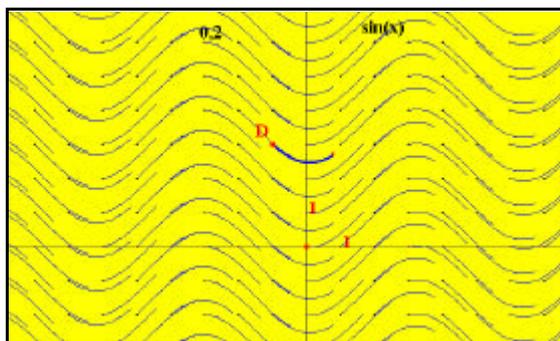
### 1.3.6. Utilisation pour déterminer des champs de solutions



La macro qui permet d'obtenir une seule ligne polygonale est appliquée en un point de la grille associée à nos axes. On peut donc visualiser les morceaux de solutions issues de ce point de la grille ou de n'importe quel autre en tirant sur D qui saute d'un point à l'autre de cette grille.

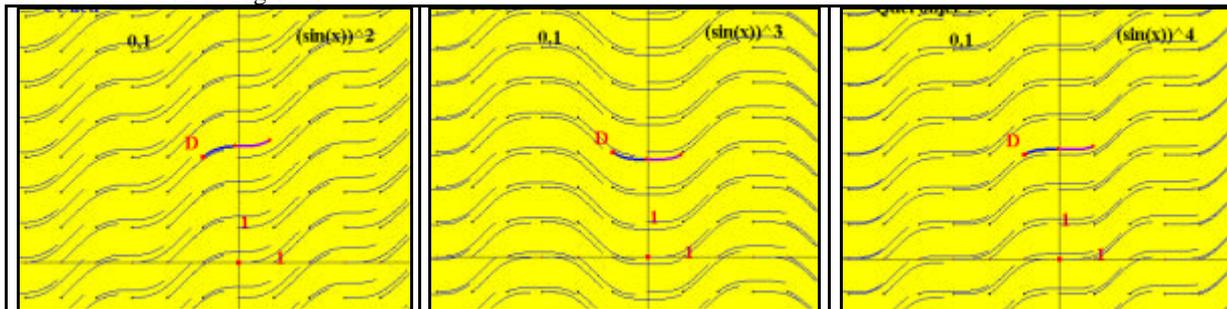


La possibilité de demander des lieux de lieux même quand le point de commande appartient à la grille, a permis d'obtenir, ce champ de solutions qui devient lui-même un outil d'exploration. On peut par exemple conjecturer le fait que toutes les solutions sont des paraboles se déduisant les unes des autres par translations verticales. Cette conjecture est ici globale.



Le fait de pouvoir en direct voir le changement de champ engendré par le changement de fonction est l'une des différences avec les logiciels de calculs formels où les paramètres du champ sont gérés dans une autre page et nécessite la connaissance à priori de la théorie sous-jacente alors qu'ici la résolution d'un problème particulier permet d'en faire un outil générique de primitivation. Ceci est possible par la possibilité d'interaction entre les registres formels et synthétiques amenées par l'outil spécifique « expression » de Cabri II Plus. Cet outil devient un instrument de médiation sémiotique entre les registres formels et synthétiques dans l'acquisition du concept de primitive.

Voici quelques copies d'écran qui peuvent permettre d'imaginer comment explorer le monde des primitives avec cette articulation de registres :



## 2. OBJECTIFS DE CES PROPOSITIONS

### 2.1. CABRI PEUT ÊTRE UN CADRE DE MODÉLISATION (de concepts mathématiques d'analyse)

(Avec une approche de la performance des modèles)

Modéliser semble être un objectif incontournable d'un enseignement des Mathématiques aujourd'hui, à l'heure de l'intégration des outils informatiques. Les exemples qui ont précédés tendent à prouver qu'il est possible de trouver des transpositions de ce nouvel objet d'enseignement qui sont à proposer aux Professeurs en priorité. La conceptualisation passant prioritairement par la visualisation, il est important de donner à voir pour avoir à interpréter. Avec Cabri utilisé comme décrit plus haut, on peut apprécier la plus ou moins bonne adéquation d'un modèle pour décrire mais aussi pour prévoir ainsi que sa viabilité qui n'est pas permanente

### 2.2. CONCEVOIR DES SCÉNARIOS DE FORMATION CONTINUE D'INITIATION À CABRI

(Donnant aux Professeurs des ingrédients pour une transposition intégrant les TICE)

On peut utiliser les activités précédentes comme une scénarisation d'une utilisation de Cabri en formation pour que les Professeurs s'approprient cette nouvelle manière d'aborder leur enseignement qui doit intégrer non seulement des outils mais aussi des objets avec lesquels ils n'ont pas été familiarisés. Pendant longtemps et encore maintenant les Professeurs ont décontenancé les experts et les formateurs en leur demandant des kits d'utilisations prêt à l'emploi en ce qui concerne les nouvelles technologies : cette réaction est une réaction écologique dans leur environnement didactique ; ils se sentaient incapable d'apprendre à se servir d'un logiciel que leur culture n'a jamais intégrée sauf à être des exécutants dociles d'une partition qui ne demandait qu'à être jouée sans apprendre à jouer d'un nouvel instrument. Une telle transposition permet de mettre en avant leurs compétences mathématiques tout en leur montrant la puissance mathématique de l'outil lorsqu'il est maîtrisé. Outre le fait qu'elle permet de montrer des modèles de modélisation en analyse, elle permet aux Professeur de prendre conscience des divers registres sur lesquels cet instrument permet de jouer enrichissant ainsi la manière d'aborder les concepts.

### 2.2. MONTRER DES EXEMPLES FAISANT TRAVAILLER LES ÉLÈVES SIMULTANÉMENT DANS LES CADRE ALGÈBRIQUE ET GÉOMÉTRIQUE

(Renouvelant la phase de construction en l'assimilant à la phase de montage expérimental)

Dans le cas où ces expériences monstratives sont abordées en salle d'informatique avec les élèves deux choix peuvent être faits conformément aux intentions du programme

**Soit**, faire réaliser les constructions aux élèves comme ils réaliseraient un montage en sciences expérimentales à la différence qu'au lieu de suivre les instructions écrites, j'ai personnellement préféré la méthode qui consiste à mettre les élèves par groupe de deux avec un élève expérimentateur qui réalise les constructions que je dicte et un autre élève qui prend des notes. Avec Cabri, ces constructions sont émaillées de manipulations les validant de manière dynamique. L'objectif étant de réaliser le fichier qui permettra par la suite de réellement faire une expérience. Les élèves auront pour tâche après la séance de rédiger un compte rendu de séance qui doit être finalement la feuille d'instructions qui n'a pas été donnée en début de séance. Il est primordial que ce compte rendu soit fidèle concernant les étapes de construction mais aussi fidèle dans la description des manipulations qui sont des mini-phases de validation : c'est à ce moment là le plus souvent qu'on peut vérifier que les changements de cadres ont été effectifs.

**Soit** donner le fichier tout prêt (il aura peut-être été conçu par les élèves eux-mêmes au cours d'une séance précédente) à fin d'utilisation avec un protocole expérimental qui cette fois est donné de manière détaillée. Les conditions de travail sont les mêmes que dans le cas précédent mais cette fois la recherche en binôme qui doit donner lieu à un compte-rendu d'expérience est axée sur le côté interprétatif des résultats obtenus : ces travaux doivent permettre aux élèves de naviguer encore entre les registres analytiques et synthétiques de manière naturelle. Cette démarche de va et vient expérimentale doit susciter le désir d'expérimenter soit même. Cette phase de prise d'initiative par prolongement de celles qui ont été proposées a été souvent observée lorsque les apprenants étaient des Professeurs en formation, elle l'a été aussi chez mes élèves mais dans une moindre mesure à cause du temps moindre consacré à ce genre d'activités.

### 2.3. ESSAYER DE FAVORISER LA PHASE TRANSITOIRE DE L'UTILISATION DES TICE

(En insistant sur la valeur monstrative des expérimentations proposées)

La phase de constructions des savoirs si elle n'est pas limitée dans le temps dépend en partie de la manière dont les concepts sont appréhendés. La manière monstrative qui consiste à concevoir une ou des expériences ayant pour but de faire adhérer au plus vite les apprenants au modèle, à la propriété visée qui est celle utilisée par les enseignants de Physique, est une voie réaliste et aussi écologiquement didactique car elle permet aux enseignants qui sont eux-même convaincus du pouvoir pédagogique de cette procédure de les utiliser si on leur fournit au moins le fichier qu'ils n'auront plus qu'à manipuler pour en tirer l'abstraction qui semble faire l'essence de leur objectif d'enseignement des Mathématiques.

A titre d'exemple, j'avais présenté il y a deux ans aux collègues de Physique de mon établissement, les

possibilités monstratives de Cabri dans le domaine de l'optique en m'inspirant des travaux de Mathilde Arragon. La réaction de l'un d'entre eux fut particulièrement positive mais avec la réserve qu'il ne pourrait jamais faire ces expériences à cause de son incompetence dans l'utilisation du logiciel. Je lui fis remarquer que de la même manière qu'il pouvait utiliser des kits expérimentaux ou qu'il pouvait utiliser un montage connu dans la littérature et monté par son garçon de laboratoire, il pouvait faire de même avec des fichiers Cabri disponibles en particuliers sur les sites spécialisés et même institutionnels sur l'Optique. Récemment je le rencontrais dans un couloir ou il me disait le plus normalement qui soit qu'il venait d'utiliser « un petit coup de Cabri » pour son cours d'optique précisant le plaisir qu'il avait eu à le faire ; il avait en effet été choisir des fichiers tout prêts dans un CD ROM institutionnel et sur des sites internet reconnues. Je pense avoir favorisé ce changement naturel de comportements par une telle présentation. Il est à noter que cette phase transitoire de l'utilisation des TICE est une phase dans laquelle est entré un Professeur de Physique et non un Professeur de Mathématiques, peut être à cause de sa culture expérimentale mais surtout à cause des équipements expérimentaux fortement présents en salles de cours de Physique intégrant les systèmes informatiques ce qui manque cruellement en Mathématiques.

(En montrant leur forte aptitude à la validation des modèles ou théories présentées en classe) On se souvient qu'à l'époque de l'introduction des Mathématiques modernes au Lycée, de toutes les discussions autour du trop fameux homomorphisme surjectif ? en liaison avec l'enroulement d'un fil sans épaisseur autour d'une bobine. La modélisation proposée n'en était pas une, ce n'était qu'une analogie compréhensible par les initiés. Les moyens informatiques actuels permettent de réaliser cette modélisation sous Cabri pour s'appuyer sur des connaissances naïves et les dépasser pour aborder la trigonométrie du lycée (voir fichiers du CD ROM Belin de Seconde et première S).

Les exemples présentés dans cet article permettent je pense d'alimenter de manière positive le débat sur l'introduction de la fonction exponentielle avant le logarithme de manière expérimentale par la méthode d'Euler. Le rôle du logiciel dépend fortement des connaissances de celui qui va concevoir l'expérience et l'impact de cette expérience va être favorable à sa réplication d'autant plus que ses facultés de modélisation vont être claires déjà pour le Professeur qui recevra une telle information.

### **3. QUOI DE MIEUX PAR RAPPORT À UN LOGICIEL DE CALCUL FORMEL**

#### **3.1. TRAVAIL SIMULTANÉ DANS UN DOUBLE CADRE**

On a vu comment on pouvait superposer les registres formels et synthétiques grâce à l'outil « expression » qui peut être manipulé sur la page Cabri. Cette piste est explorée par une équipe d'étudiants viennois qui sont en train de mettre au point un logiciel nommé GEOGEBRA qui présente deux pages sur le même écran, l'une contenant une figure du type Cabri et l'autre les équations ou coordonnées des constituants de la figure avec une interaction dans les deux sens. Il serait intéressant de voir si ce logiciel pourrait être réellement utile pour concevoir des scénarios favorisant l'intégration du registre synthétique dans une recherche à démarrage analytique c'est à dire dans un registre formel

#### **3.2. PAS DE PRÉSUPPOSÉ THÉORIQUES AUSSI IMPORTANTS**

Les techniques utilisées dans l'utilisation d'un logiciel de calcul formel sont très souvent de type algorithmique pur, c'est à dire qu'elles font appel à des technologies institutionnellement reconnues. La méconnaissance de ces technologies va rendre l'utilisation de l'outil stérile. Des tentatives sont faites à l'heure actuelle pour aménager ces logiciels pour tenir compte de ce défaut : dans la TI92, on voit apparaître des modules pédagogiques qui veulent inciter l'utilisateur à l'utiliser « intelligemment », c'est à dire en l'obligeant à prendre des initiatives permettant aussi bien d'utiliser une technique que de se l'approprier (voir résolution d'équation pas à pas B Kutzler)

#### **3.3. RÉINVESTISSEMENT PERMANENTE DES CONNAISSANCES EN AMONT (pour une optimisation de leur utilisation)**

On a pu voir comment les notions de vecteur, de translation, de coordonnées étaient reprises de manière opérationnelle avec un objectif stratégique précis montrant ainsi l'adéquation de ces outils dans une modélisation informatique. En animant le point à partir duquel on a tracé une droite ayant une pente dépendant de l'abscisse de ce point, on peut vérifier si le concept de pente lié à une formule paramétrée reste prégnant.

#### **3.4. CRÉATION D'OUTILS PERSONNALISÉS (pour progresser dans la recherche de problèmes avec des aides individualisées)**

Il s'agit des macroconstructions ; contrairement à la programmation classique, la macro construction est un outil programmé avec son mode d'emploi qui permet d'automatiser des tâches répétitives dans le domaine synthétique en sautant toute la partie opératoire qui a été exécutée une seule fois dans les domaines analytiques, synthétiques et numériques. Les macro constructions de Cabri ne sont pas sans rappeler les programmes telles qu'il fallait les concevoir dans les anciennes calculatrices FX92 de Casio

## 4. PUBLICATIONS AUTOUR DE CE THÈME

### 4.1. PRATIQUER ET ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES AVEC CABRI

Des exemples ont été présentés à un atelier du congrès de l'APM de Nice qui ont donné lieu à un compte-rendu html sur le site internet de l'IREM de Toulouse <http://www.irem.ups-tlse.fr>  
un compte-rendu écrit sur un numéro transitoire de Plot

Une brochure portant ce titre a été éditée par l'IREM de Toulouse

Donnant un éventail plus large de tels exemples

De multiples exemples ont été proposés dans les livres de Seconde et Première S de la collection Belin, en particulier, le fichier de base Cabri mettant en place la méthode d'Euler

### 4.2. UN EXEMPLE DE TRANSPOSITION DE NOTION D'ANALYSE EN CLASSE (enseigner les fonctions de références avec Cabri)

? Une expérimentation a été faite en classe de seconde (deux années d'affilée) et des compte-rendus ont été faits

Pendant un mini-cours du Congrès Cabriworld à Montréal

Pendant un atelier du Congrès de l'APM de Lille

Cette expérimentation avec l'évaluation finale proposée aux élèves sous forme d'exercice en devoir surveillé a été détaillée dans la brochure de l'IREM précitée

? Les conclusions tirées : difficultés d'obtenir une dévolution au processus de démarche expérimentale qui n'est pas reconnu comme un objet d'enseignement

? Les amendements expérimentaux : une meilleure intégration de la démarche expérimentale dans le temps permet une acceptation plus grande, bien que les exercices de ce type donnés en évaluation sont toujours nettement bien moins réussis que les autres. Les devoirs donnés dans les classes où cette démarche n'est pas arrivée ex-nihilo ont un meilleur coefficient de réussite (pas d'enquête statistique mais on observe une différence significative entre le nombre d'élèves abordant l'exercice sans prérequis expérimental et les autres)

## 5. BIBLIOGRAPHIE

Actes du Colloque « Enseignement de la Géométrie dans le Secondaire (Liège 2003) à paraître

Atelier : Caractérisation de droites et de plans : articulation des registres synthétique, analytique et vectoriel

**M. Schneider et M. Kryszynska.**

Recherches en didactique des Mathématiques Vol 8/3 La pensée sauvage Editions

Les fonctions didactiques de l'expérimental dans l'enseignement scientifique (page 231)

**Marie-Alberte Johsua et Samuel Johsua**

Didaskalia N°3

Analogies et enseignement des sciences : une analogie thermique pour l'électricité (page 9)

**J.J. Dupin et S. Johsua**

Les analogons et la maquette didactique (page 109)

**S. René De Cotret et R. Larose**

Didaskalia N°6

Apprentissage de l'expérimentation en physique.

1- La place de l'expérimentation dans les concours de recrutement (page 137)

2- Apprentissage des techniques expérimentales à l'E.N.S. Cachan (page 153)

**F. Perrot et M. Tadjeddine**

Didaskalia N°9

Investigations des élèves en science : une approche fondée sur la connaissance (page 9)

**R. Millar**

Manuel de mathématiques de Première S Éditions Belin 1999

Atelier TICE : Une courbe enveloppée par ses tangentes (page 78) ; Une courbe enveloppée par une échelle qui glisse (page 79) ; Fabrication d'une macro-construction sur Cabri (page 79) ; Courbes intégrales de  $y = 2x$  (page 80)

**Sous la direction de J.P. Bouvier avec J.J. Dahan**

Manuel de mathématiques de Seconde Éditions Belin 2000

Thèmes divers exercice 64 page 58

**Sous la direction de J.P. Bouvier avec J.J. Dahan**

Repères IREM N°36

Le Professeur de Mathématiques doit-il enseigner la modélisation ?

**Jean-Claude Girard IREM de Lyon**

Repères IREM N°5

Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente

**M. Schneider-Gilot**

Proceedings of the 7th ATCM (Melaka 2002)

How to teach mathematics in showing all the hidden stages of a true research. Examples with Cabri (page 61)

